

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота
бакалавра
на тему «*Системи голосування та теорема
Ерроу*»

Виконав:

студент групи МП 41

4 курсу

спеціальність 113 – прикладна математика

освітньо-професійна програма

“Прикладна математика”

Пономарьов О.О.

Керівник:

кандидат фіз.-мат. наук

доцент кафедри прикладної математики

Ревіна Т.В.

Рецензент:

кандидат пед. наук

доцент кафедри економічної кібернетики

та прикладної економіки

Сілічова Т. В.

Харків — 2025 рік

Анотації

Пономарьов Олександр Олександрович. Системи голосування та теорема Ерроу.

У кваліфікаційній роботі були досліджені математичні моделі найвідоміших систем голосування, таких як метод Борда, метод Кондорсе, система абсолютної більшості та інші, показані приклади парадоксів цих методів та можливості маніпулювання результатами виборів, а також досліджено частоту появи цих парадоксів для методів Борда і Кондорсе в різних умовах.

В дослідженнях Ерроу було показано проблему неможливості жодної з існуючих систем голосування визначати переможця, враховуючи думку кожного виборця. За теоремою Ерроу, для відображення колективної думки, яка враховувала б побажання кожного виборця, система голосування повинна дотримуватись певних базових аксіом, які можуть виконуватись одночасно лише за рахунок існування виборця, який своїм голосом визначає результат голосування, тобто диктатора, що суперечить урахуванню побажань кожного виборця.

Ключові слова: системи голосування, метод Кондорсе, метод Борда, парадокс, теорема Ерроу, профіль переваг

Ponomarov Oleksandr Oleksandrovyich. Voting systems and Arrow's theorem.

In the qualification work we investigated the mathematical models of the most famous voting systems, such as the Bordeaux method, the Condorcet method, the absolute majority system, and others, showed examples of paradoxes of these methods and the possibility of manipulating election results, and also investigated

the frequency of occurrence of these paradoxes for the Borda's and Condorcet methods in different conditions.

In the Arrow theorem it is shown the problem of the inability of any of the existing voting systems to determine the winner, taking into account the opinion of each voter. According to Arrow's theorem, in order to reflect the collective opinion that would take into account the wishes of each voter, the voting system must adhere to certain basic axioms that can be fulfilled simultaneously only due to the existence of a voter who determines the outcome of the vote with his vote, i.e. a dictator, which contradicts the consideration of the wishes of each voter.

Keywords: voting systems, Condorcet method, Borda method, paradox, Arrow's theorem, preference profile

Зміст

Вступ	5
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ГОЛОСУВАННЯ ТА ЇХ НЕДОЛІКИ	7
1.1. Система голосування як функція соціального вибору	7
1.2. Необхідні властивості для функції соціального вибору	8
1.3. Парадокс методу голосування	9
1.4. Випадок, коли альтернативи дві	10
1.4.1. Відносна більшість	10
1.4.1. Абсолютна більшість	10
1.5. Випадок, коли альтернативи три і більше	11
1.6. Метод Кондорсе	12
1.7. Парадокс методу Кондорсе	13
1.8. Приклад застосування методу Кондорсе. Поправка Пауелла	14
1.9. Метод Борда	15
1.10. Парадокс методу Борда і його наслідки	17
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕМА ЕРРОУ	21
2.1. Формулювання і доведення теореми Ерроу	21
РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТИ ПАРАДОКСІВ У МЕТОДАХ КОНДОРСЕ ТА БОРДА	26
3.1. Опис задачі та умов експерименту	26
3.2. Підготовка середовища	27
3.3. Реалізація методів і пошук парадоксів	27
3.3.1. Метод Кондорсе	27
3.3.2. Метод Борда	29
3.4. Налаштування моделювання	30
3.5. Візуалізація частот парадоксів на графіках	31
3.6. Аналіз результатів	35
ВИСНОВКИ	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	38

Вступ

В системі голосування ми працюємо з двома скінченними множинами: множиною виборців і множиною альтернатив:

Виборці – ті, хто обирає переможця і впливає на результат голосування;

Альтернативи – всі можливі варіанти вибору.

Кожен виборець формує певне відношення до альтернативи, яку він обирає [16, с.2].

Означення (відношення). Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив.

Тоді *відношення уподобань виборця* – це бінарне відношення

$$R \subseteq N \times A = \{(n_1; a_i), (n_2; a_j), \dots (n_n; a_k)\},$$

при чому допускається, що $i = j = \dots = k$.

Тобто це множина що складається з пар елементів виду $(n_i; a_j)$, які відображають, якій альтернативі a_j віддав перевагу n_i -й виборець.

Відношення уподобання кожного учасника $n_i \in N$ позначимо як $\succeq_i$.

Відповідно далі будемо позначати:

- $a_i \succeq_i a_j$ – якщо виборець n_i вважає альтернативу a_i щонайменше такою ж бажаною, як a_j ;
- $a_i \succ_i a_j$ – якщо виборець n_i вважає альтернативу a_i точно бажанішою, ніж a_j ;
- $a_i \sim_i a_j$ – якщо для виборця n_i , альтернативи a_i та a_j однаково бажані.

У випадках, коли кожен виборець обирає не одну найбільш вподобану альтернативу, а *ранжує кандидатів*, вводиться таке поняття, як **профіль переваг виборців** – це множина уподобань усіх виборців в системі

голосування, що складається з упорядкованих списків, які показують, як кожен виборець ранжує множину альтернатив [16, с.2-3].

Означення (профіль переваг). Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив.

Кожен виборець $n_i \in N$ має свій лінійний порядок переваг p_i , який задовільняє:

- 1) Повноті: $\forall a_k, a_j \in A (k \neq j)$ або $a_k \succ_i a_j$ або $a_j \succ_i a_k$ або $a_k \sim_i a_j$
- 2) Транзитивності: $\forall a_k, a_j, a_t \in A (k \neq j \neq t)$, якщо $a_k \succ_i a_j$ і $a_j \succ_i a_t$, то $a_k \succ_i a_t$

Профіль переваг усіх виборців можемо записати як $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, де:

- p_i — лінійний порядок переваг виборця i ,
- n — кількість виборців.

І кожен p_i можна подати у вигляді перестановки множини

$$A: p_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}),$$

де $a_{i_1} \succ_i a_{i_2} \succ_i \dots \succ_i a_{i_m}$.

В такому випадку бінарне відношення уподобань виборця буде мати вигляд

$$R \subseteq N \times P = \{(n_1; p_1), (n_2; p_2), \dots, (n_n; p_n)\},$$

тобто всі можливі пари виду $(n_i; p_i)$, де кожному виборцю n_i відповідає його профіль переваг p_i .

Розділ 1. Методи голосування та їх недоліки

1.1. Система голосування як функція соціального вибору

Визначимо систему голосування, як деяку *функцію соціального вибору* (суспільного добробуту), тобто функцію, яка обирає групове рішення на основі індивідуальних уподобань кожного виборця [10, с. 1-3].

Означення. Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив і $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – профіль переваг виборців N .

Тоді, функція соціального вибору F буде відображенням з множини усіх можливих уподобань P на функцію усіх можливих альтернатив A , тобто

$$F : P \rightarrow A,$$

де $F(P) = a_k \in A$, тобто функція F повертає одну альтернативу a_k , яка відображає суспільний вибір, заданий відношенням $\succ_f$.

Природньо очікувати, що система голосування має:

- 1) Враховувати думку кожного
- 2) Завжди визначати переможця

Відповідно до цього, сформулюємо для функції голосування конкретні математичні властивості, які гарантували б справедливий вибір, враховуючий думку кожного.

1.2. Необхідні властивості для функції соціального вибору

Наведемо властивості, сформульовані в роботі Кеннета Ерроу [10, с.3-10]:

(A1) Незалежність від сторонніх альтернатив.

Ранжування між будь-якими двома альтернативами a_i і a_j в профілі уподобань P залежить тільки від індивідуальних переваг між a_i і a_j .

Формально:

$$p_i \mid \{a_i, a_j\} = p_j \mid \{a_i, a_j\} \Rightarrow p_i * \{a_i, a_j\} = p_j * \{a_i, a_j\}$$

(A2) Універсальність (повнота).

Означає, що виборець має визначити відношення до всіх альтернатив, а система має визначати переможця враховуючи профіль переваг кожного виборця.

(A3) Парето-оптимальність.

Якщо ВСІ виборці вважають альтернативу a_i кращою за альтернативу a_j , то в результаті альтернатива a_i має бути краще за альтернативу a_j . Зокрема, якщо всі вважають, що кандидат a_k краще всіх інших, то він і має перемогти.

$$\forall n_i : a_i \succ_i a_j \Rightarrow a_i \succ_* a_j$$

(A4) Відсутність диктатора.

Не існує такого виборця n_i , що його індивідуальний порядок p_i завжди співпадає з колективним профілем, незалежно від переваг інших виборців.

Формально:

$$\forall P: f(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq p_i.$$

(A5) Транзитивність.

$$a_i \succ a_j \succ a_k \Rightarrow a_i \succ a_k$$

1.3. Парадокс методу голосування

Далі в роботі будуть розглянуті різні методи голосування для знаходження $F(P)$ і продемонстровані випадки, коли ці методи порушують виконання необхідних властивостей для функції F . Такі випадки будемо називати парадоксами методів [10, с.9-10]. Для цього, введемо формальне означення.

Означення (парадокс). Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив.

p_i — лінійний порядок переваг виборця i , заданий відношенням $>_i$.

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — профіль переваг усіх виборців з множини N .

$F : P \rightarrow A$ — функція соціального вибору.

Зафіксуємо деяку аксіому (A_k) для функції F .

Позначимо $Q_{(A_k)}(P, F(P))$ – предикат «метод F задовольняє аксіому (A_k) на профілі P ».

Тоді, профіль P називають парадоксальним відносно аксіоми A_k в методі F , якщо

$$\exists P : \text{предикат } Q_{(A_k)}(P, F(P)) \text{ не виконано}$$

Інакше кажучи, парадокс — це поява профілю, за якого метод F порушує хоча б одну з обраних аксіом.

1.4. Випадок, коли альтернативи дві

1.4.1. Відносна більшість

Правило відносної більшості означає, що переможцем оголошується та альтернатива, яка набрала найбільшу кількість голосів, навіть якщо ця кількість становить менше половини від загальної кількості голосів. Це правило найпростіше в застосуванні, з єдиним невірешеним питанням, коли $n \bmod m = 0$, де n – кількість виборців і m – кількість альтернатив. Може виникнути ситуація коли всі кандидати отримали однакову кількість голосів (при цьому найбільшу) [4, с.95].

На практиці, така проблема виникає рідко і основний недолік цього правила, через який він насправді не відображає колективних вподобань, в іншому. Можемо отримати наступну ситуацію:

Якщо $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив, де $m \geq 3$ і a_i – переможець за відотною більшістю з кількістю голосів $< 50\%$, то відсоток людей, що проголосували НЕ за a_i буде $> 50\%$, тобто більшість проти переможця. Щоб цього уникнути, можна спробувати накласти умову, яка не віддає перемогу кандидату, якщо у нього немає $> 50\%$ всіх голосів. Для цього застосовують правило абсолютної більшості [1, с.59]

1.4.2. Абсолютна більшість

Застосовуючи правило абсолютної більшості, перемагає та альтернатива, яка отримала більше половини від усіх голосів. Якщо ж жодна з них не здобула такої підтримки, організовують другий тур голосування між двома лідерами з першого. [4, с.95]. Саме цим способом обирають, зокрема, президента України.

У 1952 році американський математик Кеннет О. Мей [12] довів, що для двох альтернатив, коли виборців непарна кількість, система абсолютної

більшості є єдиною, яка відповідає всім необхідним властивостям для функції соціального вибору.

Єдине невирішене на практиці питання — як поводитися при рівній кількості голосів, але за умови великого числа виборців ($n \rightarrow \infty$) ймовірність такого паритету прямує до нуля.

1.5. Випадок, коли альтернативи три і більше

У випадку, коли альтернатив ≥ 3 , голосування за абсолютною більшістю не завжди точно визначає переможця, оскільки при переході на другий тур, можуть виникнути певні проблеми. Продемонструю їх на прикладі з чотирма кандидатами [3, с.10-11]:

Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_{32}\}$ - множина виборців, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – множина альтернатив, і нехай система ранжувань уподобань виборців має вигляд:

Пріоритет/Виборці	10	8	6	3	5
1	a_1	a_2	a_4	a_4	a_3
2	a_3	a_3	a_2	a_1	a_4
3	a_2	a_4	a_3	a_2	a_2
4	a_4	a_1	a_1	a_3	a_1

За правилом абсолютної більшості, для перемоги кандидат повинен здобути ≥ 17 голосів. Бачимо наступні результати:

кандидат a_1 – 10 голосів,

кандидат a_2 – 8 голосів,

кандидат a_3 – 5 голосів,

кандидат a_4 – 9 голосів.

Отже, оголошується другий тур, в який проходять кандидати a_1 та a_4 . Порівнювати будемо підраховуючи, скільки виборців поставили a_1 над a_4 , і скільки a_4 над a_1 (припускаємо що виборці не змінили своїх вподобань в другому турі відносно a_1 і a_4).

Отримуємо:

a_1 над a_4 – 10 виборців,

a_4 над a_1 – 22 виборці.

Тобто, a_4 перемагає a_1 з рахунком (22:10) і, відповідно, перемагає.

Але якщо ми порівняємо відношення виборців щодо кандидатів a_2 та a_3 , відносно переможця a_4 , то побачимо:

a_2 над a_4 – 18 з 32 виборців,

a_3 над a_4 – 23 з 32 виборців.

Тобто отримуємо ситуацію, коли більшість виборців вважають кращими за переможця ті альтернативи, які навіть не пройшли в другий тур.

Для того щоб цього уникнути, різні математики намагались створити методи голосування, які б враховували побажання кожного і точно визначали переможця для випадку трьох або більше альтернатив. Першими, хто почав це робити, були французькі математики Кондорсе та Борда. Всі існуючі методи преференційного голосування для трьох або більше альтернатив засновані саме на цих методах (або якомусь з них), тож розглянемо їх детально і покажемо що з ними не так.

1.6. Метод Кондорсе

Маркіз де Кондорсе (1743 – 1794)

Повне ім'я - Марі-Жан-Антуан-Ніколя де Каріта́, марки́з де Кондорсе́ (фр. Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet). – математик, член Французької, Берлінської та Американської академій наук. Вважається, що саме він був першим, хто почав застосовувати математику до соціальних процесів.

В 1785 році Кондорсе опублікував «Есе про застосування аналізу до ймовірності рішень, прийнятих більшістю голосів», де і описав свій метод голосування, в якому зосередив увагу саме на випадку для трьох альтернатив. Він запропонував проранжувати кандидатів у порядку вподобання, створити

всі можливі пари альтернатив, а потім попарно їх порівняти вже за допомогою методу абсолютної більшості.

Означення. Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив, де $m \geq 3$.

Для кожної пари альтернатив a_i та a_j визначається, скільки виборців віддають перевагу a_i над a_j , і навпаки:

Нехай $V(a_i, a_j)$ = кількість виборців, які ставлять a_i над a_j

Аналогічно, $V(a_j, a_i)$ = кількість виборців, які ставлять a_j над a_i

Вважаємо, що альтернатива a_i перемагає альтернативу a_j , якщо:

$$V(a_i, a_j) > V(a_j, a_i)$$

Результати попарного порівняння записуються у вигляді матриці $M = [m_{ij}]$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } V(a_i, a_j) > V(a_j, a_i) \\ -1, & \text{якщо } V(a_i, a_j) < V(a_j, a_i) \\ 0, & \text{якщо } V(a_i, a_j) = V(a_j, a_i) \end{cases}$$

Альтернатива a_* буде переможцем за Кондорсе, якщо

$$\forall a_j \in A \setminus \{a_*\}, V(a_*, a_j) > V(a_j, a_*)$$

1.7. Парадокс методу Кондорсе

Виявилось, що метод Кондорсе порушує транзитивність. Щоб наглядно побачити проблему, я наведу свій приклад:

Нехай $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{12}\}$, множина альтернатив – $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Нехай система ранжування вподобань виборців має вигляд:

Пріоритет/Виборці	3	4	5
1	a_2	a_1	a_3
2	a_1	a_3	a_2
3	a_3	a_2	a_1

Спробуємо визначити переможця за методом Кондорсе.:

a_3 перемагає a_2 (9 : 3),

a_2 перемагає a_1 (8 : 4),

Далі логічно припустити, що a_3 переможе a_1 .

Але, a_3 програє a_1 (5 : 7).

Отже, переможця за Кондорсе не існує.

Фактично, ми маємо наступну циклічну ситуацію:

$$a_3 \succ a_2, \quad a_2 \succ a_1, \quad a_1 \succ a_3.$$

Це і є парадокс методу Кондорсе, який отримав назву «Цикл Кондорсе».

Тобто, метод Кондорсе **не виконує умову транзитивності** (навіть незважаючи на те, що всі уподобання окремих виборців є транзитивними).

1.8. Приклад застосування методу Кондорсе. Поправка Пауелла

Відомий випадок виникнення циклу Кондорсе в реальному житті виник в американському Конгресі і для того щоб його навести, потрібно розказати як там приймають законопроекти.

Оригінальному закону надається статус-кво. Перша поправка, яку до нього вносять називається білль. Далі можна подавати поправки до білля, поправки до поправок, альтернативний білль, поправки до альтернативного білля. Тобто всього 6 варіантів, які порівнюються наступним чином: поправки до білля проти поправок до поправок і альтернативний білль проти поправок до альтернативного білля. Після цього, переможці один проти одного і кінцевий переможець проти статусу кво.

Теоретично, може виникнути наступна ситуація:

1. Білль перемагає статус-кво;
2. Поправка перемагає білль;
3. Статус-кво перемагає поправку.

Іншими словами, може виникнути цикл Кондорсе. Найпопулярніша ситуація коли це сталося – так звана «Вбивча поправка Пауелла» в 1956 році [14].

Президент Ейзенхауер зібрав кошти на підтримку всіх шкіл в США і цей законопроект швидко прийняли (переміг статус-кво), але Пауелл запропонував поправку, яка виключала з програми допомоги ті школи, які продовжували практикувати расову сегрегацію. Частина республіканців і північних демократів проголосували за неї, таким чином вона перемогла оригінальний білл, а всі південні демократи були проти. Але потім білл з поправкою Пауелла не зміг перемогти статус кво.

Тобто виникла наступна ситуація:

білл Ейзенхауера $>$ статус – кво,
поправка Пауелла $>$ білл Ейзенхауера,
статус – кво $>$ поправка Пауелла.

В кінці-кінців, поправку Пауелла не ухвалили, оскільки вона викликала занадто багато суперечок, але математично, премождя в цьому випадку не існувало.

Есе з цим методом Кондорсе написав як відповідь на метод Борда, який порушував іншу необхідну властивість функції соціального вибору. Натомість, його метод підходив лише для випадку, коли кількість кандидатів строго дорівнювала трьом, оскільки порушення транзитивності виникало тим частіше, чим більше кандидатів приймало участь у голосуванні (про це детальніше в Розділі 3). Він не врахував це спочатку і не зміг придумати як вирішити цю проблему.

1.9. Метод Борда

Жан-Шарль де Борда (1733 – 1799)

Повне ім'я - Жан-Шарль шевальє де Борда (фр. Jean-Charles, chevalier de Borda). – теж французький математик.

У 1770 році опублікував «Мемуар про вибори шляхом голосування», де запропонував систему преференційного голосування, в якій спробував врахувати вподобання виборців в умовах саме нескінченно великої кількості кандидатів (навідміну від Кондорсе, який здебільшого розглядав випадок $m = 3$). [8].

Зараз цей метод один з найпопулярніших у світі. Він застосовується на Євробаченні і, зокрема, при виборах депутатів до парламенту Словенії та Науру, а також при голосуванні на Євробаченні [7].

Суть методу Борда полягає в тому, щоб виразити результати голосування у вигляді балів, для кожного кандидата наступним чином: якщо у нас є n альтернатив, то за кожне перше місце в лінійному порядку переваг виборця, альтернатива отримує $n - 1$ балів, за кожне друге $n - 2$ і т.д. За останнє - 0 балів. Потім, для кожного кандидата, сумується загальною кількістю балів по всьому профілю переваг (в кожному лінійному порядку). Перемагає кандидат з найбільшою кількістю балів [13].

Означення. Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив.

Кожен виборець створює рейтинг серед кандидатів, де кожному кандидату надається певна кількість балів залежно від його місця в уподобаннях виборця. Позначимо рейтинг виборця k для кандидата a_i як $R_k(a_i)$, де $R_k(a_i)$ - це позиція кандидата a_i в порядку переваг виборця k . Кожному кандидату a_i присвоюється кількість балів $B_k(a_i)$ відповідно до його позиції в рейтингу виборця k [2, с.121-123]. Тобто:

$$B_k(a_i) = n - R_k(a_i)$$

Підсумкова кількість балів для кандидата a_i :

$$S(a_i) = \sum_{k=1}^n B_k(a_i) = \sum_{k=1}^n (n - R_k(a_i))$$

Переможе той кандидат, у якого найбільша сума балів, тобто

$$S(a_i) = \arg \max_{a_i \in A} B_k(a_i)$$

1.10. Парадокс методу Борда і його наслідки

Для його демонстрації недоліку метода Борда, наведу декілька прикладів:

Приклад 1.

Нехай $N = \{n_1, n_2, n_3\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ - множина альтернатив.

Нехай, система ранжування уподобань виборців виглядає наступним чином:

Пріоритет	Ранг	Виборці (кількість)				
1	2	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2
2	1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3
3	0	a_3	a_3	a_3	a_1	a_1

Порахуємо бали кандидатів:

$$a_1: 3 * 2 + 0 * 1 + 2 * 0 = 6 \text{ балів}$$

$$a_2: 2 * 2 + 3 * 1 + 0 * 0 = 7 \text{ балів}$$

$$a_3: 0 * 2 + 2 * 1 + 3 * 0 = 2 \text{ балів}$$

Отже, переможець – a_2 , хоча можна помітити, що 3/5 виборців вважають $a_1 > a_2$. Саме цей фактор і створює проблему (про це – далі).

Видалимо кандидата a_3 , залишивши ранжування між a_1 і a_2 незмінними:

Пріоритет	Ранг	Виборці (кількість)				
1	1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2
2	0	a_2	a_2	a_2	a_1	a_1

Тоді:

$$a_1: 3 * 1 + 2 * 0 = 3 \text{ балів}$$

$$a_2: 2 * 1 + 0 * 0 = 2 \text{ балів}$$

Тепер переможець – a_1 , хоча перший раз він зайняв друге місце. Тобто, ми прибрали кандидата який зайняв останнє місце і це змінило переможця.

Відповідно, метод Борда порушує умову незалежності від сторонніх альтернатив.

Цей парадокс має два наслідки. Як вже було зазначено, не дивлячись на те що 3/5 виборців вважали $a_1 > a_2$, в перший раз перемогла альтернатива

a_2 . Відбулось це за рахунок того, що у a_2 було менше відхилень від першого місця ніж у a_1 . Звідси можемо зробити висновок, що системою Борда можна маніпулювати і спробувати забрати перемогу у альтернативи яку більшість ставить не перше місце, просто ставлячи її на останнє. І дійсно це так. Для того щоб це продемонструвати наведу наступний приклад:

Приклад 2.

Розглянемо трохи модифікований приклад з розділу 1.6. .

Нехай виборців 7 і всі вони проти a_3 , але вибираючи між a_1 та a_2 , перші чотири віддають перевагу a_1 , а інші три – a_2 .

Отже, нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_7\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ - множина альтернатив.

Нехай, система ранжування уподобань виборців виглядає наступним чином:

Пріоритет	Ранг	Виборці (кількість)	
		4	3
1	2	a_1	a_2
2	1	a_2	a_1
3	0	a_3	a_3

Тоді, за методом Борда:

$$a_1: 4 * 2 + 3 * 1 = 11 \text{ балів,}$$

$$a_2: 3 * 2 + 4 * 1 = 10 \text{ балів,}$$

$$a_3: 0 * 2 + 0 * 1 + 0 * 0 = 0 \text{ балів.}$$

Тобто, перемагає a_1 .

Але це за умови, що всі проголосували чесно.

Припустимо, що 3 останніх виборці, знаючи як голосують перші 4, ставлять альтернативу a_1 на останнє місце, аби тільки вона не перемогла (навіть не дивлячись на те, що a_3 вони вважають гірше за a_1).

Тоді, за методом Борда:

$$a_1: 4 * 2 + 0 * 1 + 1 * 0 = 8 \text{ балів,}$$

$$a_2: 3 * 2 + 4 * 1 + 0 * 0 = 10 \text{ балів},$$

$$a_3: 0 * 2 + 3 * 1 + 4 * 0 = 3 \text{ бали}.$$

Отже, переможець a_2 .

Іншими словами, для того щоб маніпулювати результатами і вивести в лідери найбільш привабливу для себе альтернативу, достатньо голосувати не щиро, а ставити на останні місця найбільш «сильних» конкурентів.

Саме через це в 1800 році, в Академії Наук у Франції Наполеон Бонапарт особисто скасував використання методу Борда для вибору нових академіків і замість нього наказав застосовувати абсолютну більшість. [15, с.389].

Інший наслідок порушення незалежності від сторонніх альтернатив, професор факультету прикладних наук УКУ, Ігнатенко О. [5] охарактеризував, як «парадокс неявики». Наведу приклад для його демонстрації.

Приклад 3.

Нехай $N = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ - множина альтернатив.

Нехай, система ранжування уподобань виборців виглядає наступним чином:

Пріоритет	Виборці (кількість)						
1	a_1	a_4	a_3	a_1	a_4	a_3	a_1
2	a_2	a_1	a_4	a_2	a_1	a_4	a_2
3	a_3	a_2	a_1	a_3	a_2	a_1	a_3
4	a_4	a_3	a_2	a_4	a_3	a_2	a_4

Де кожен стовпець – 1 виборець.

Спробуємо знайти переможця методом Борда.

Враховуючи рейтинг для кожної альтернативи, отримуємо:

$$a_1: 3 * 3 + 2 * 2 + 2 * 1 + 0 * 0 = 15 \text{ балів}$$

$$a_2: 3 * 0 + 3 * 2 + 2 * 1 + 2 * 0 = 8 \text{ балів}$$

$$a_3: 2 * 3 + 0 * 2 + 3 * 1 + 2 * 0 = 9 \text{ балів}$$

$$a_4: 2 * 3 + 2 * 2 + 0 * 1 + 3 * 0 = 10 \text{ балів}$$

Отже, переможець альтернатива a_1 .

Припустимо, що за якихось обставин, a_1 вийшов з голосування. Логічно припустити, що переможе друге місце – альтернатива a_4 . Перевіримо це:

Пріоритет	Ранг	Виборці (кількість)						
1	2	a_2	a_4	a_3	a_2	a_4	a_3	a_2
2	1	a_3	a_2	a_4	a_3	a_2	a_4	a_3
3	0	a_4	a_3	a_2	a_4	a_3	a_2	a_4

В цьому випадку:

$$a_2: 3 * 2 + 2 * 1 + 2 * 0 = 8 \text{ балів}$$

$$a_3: 2 * 2 + 3 * 1 + 2 * 0 = 7 \text{ балів}$$

$$a_4: 2 * 2 + 2 * 1 + 3 * 0 = 6 \text{ балів}$$

Отже, переможець альтернатива a_2 , хоча в попередньому варіанті вона була на останньому місці.

Тобто, якщо ми прибираємо з системи переможця, а інше не змінюємо, то може бути так, що виграє не друге місце, а хтось інший.

Розділ 2. Теорема Ерроу

2.1. Формулювання і доведення теореми Ерроу

Кеннет Ерроу

Повне ім'я Кеннет Джозеф Ерроу (Kenneth Joseph Arrow, 1921–2017) – американський економіст і математик, лауреат Нобелівської премії з економіки 1971 року.

В 1951р. він сформулював «неможливу теорему Ерроу», яка вперше була опублікована в його дисертації, а потім детально викладена в книзі «Social Choice and Individual Values».

В ній він сформулював систему голосування як деяку функцію, яка бере в якості параметрів вподобання виборців і повертає єдиний результат у вигляді переможної альтернативи (п.1.1, п.1.2) та спробував знайти такий метод, який задовільняє всім властивостям цієї функції.

В результаті, єдина умова, за якої функція задовільняла всім властивостям була наявність такого виборця, що його особистий вибір відображає колективний, незалежно від вподобань інших виборців. Тобто по суті – наявність диктатора. Після введення умови «Відсутність диктатора», було зроблено висновок, що необхідного методу не існує [6].

Сам Ерроу сформулював теорему так [10]: «Якщо $|A| \geq 3$, то будь-яка Парето-ефективна, незалежна від сторонніх альтернатив функція соціального вибору f має диктатора».

Сформулюємо цю теорему більш формально [4, с.98]:

Теорема (Ерроу). Нехай $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ - множина виборців і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - множина альтернатив.

p_i — лінійний порядок переваг i -го виборця, заданий відношенням $\succ_i$.

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — профіль переваг усіх виборців з множини N .

$F : P \rightarrow A$ — функція соціального вибору.

$\succ_f$ — колективні вподобання.

Якщо кількість альтернатив $m \geq 3$, то:

$$\forall F : P \rightarrow A (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A5) \Rightarrow \exists! k \in N, \forall (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P, \forall a_i, a_j \in A, (a_i \succ_f a_j \Leftrightarrow a_i \succ_k a_j)$$

або

$$m \geq 3 \Rightarrow \nexists f : (A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4 \wedge A5),$$

тобто за умови $m \geq 3$ жодна функція соціального вибору f , яка задовольняє умови (A1), (A2), (A3), (A4) і (A5) – не існує.

Опишемо одну з версій доведення на основі роботи Джона Геанакоплоса, науковим керівником якого був сам Кеннет Ерроу [11, с.211-212].

Доведення (Теорема Ерроу).

□ Проводити доведення будемо в 4 етапи.

Етап 1.

Спочатку доведемо той факт, що якщо частина виборців помістить одну й ту саму альтернативу на початку списку, а інша частина в кінці, то і в $\succ_f$ ця альтернатива буде або на початку, або в кінці:

Візьмемо довільну альтернативу $b \in A$ і розглянемо деякий профіль $P = \{\forall i, p_i : (b \succ_i a_i) \vee (a_i \succ_i b)\}$, тобто такий, що в ньому у кожного виборця альтернатива $b \in A$ знаходиться або на початку, або в кінці списку вподобань $\succ_i$. Доводити будемо від противного – припустимо що це не так, тобто існують такі $a, c \in A$, що $a \succ_f b$ і $b \succ_f c$. Тоді змінимо профіль P до вигляду $P' = \{\forall i, p_i : (c \succ_i a)\}$, тобто так, щоб у кожного виборця альтернатива c була вища за a , не змінюючи при цьому ранжування інших альтернатив між собою. Оскільки після такої зміни альтернатива b все одно залишиться на початку або в кінці результуючого профілю, то з властивості (A1) (*Незалежність від сторонніх альтернатив*) випливає, що і для P' буде виконуватись $a \succ_f b$ і $b \succ_f c$ (оскільки ми не змінювали ранжування інших альтернатив між собою). Тоді, в силу (A5) (*Транзитивності*) для $\succ_f$ в

результаті повинно бути $a \succ_f c$. Але так як в нашому припущенні $\forall i c \succ_i a$, то в силу (A3) (Парето-оптимальності) на виході ми повинні отримати $c \succ_f a$. Отримане протиріччя доводить твердження.

Етап 2.

Доведемо, що $\forall b \in A, \exists$ переворотний виборець n^* , тобто від зміни голосу якого результат b може переміститись з кінця на початок списку $\succ_f$:

Не порушуючи загальності, візьмемо профіль переваг, у якому всі виборці розташували альтернативу $b \in A$ в кінці списку, тобто $P^0 = \{\forall i, p_i : (a_i \succ_i b)\}$. Позначимо цей профіль як нульовий (початковий). В силу Парето-оптимальності, в результаті $\succ_f$ альтернатива b теж буде знаходитись в кінці. Нехай всі виборці почали переставляти b з найнижчої на найвищу позицію по черзі, при цьому не міняючи ранжування інших альтернатив між собою. Кожен новоутворений профіль переваг будемо позначати як $P^1, P^2, \dots, P^n$, де P^1 – профіль в якому один виборець перемістив b на початок, P^2 – в якому два, $\dots$, P^n – в якому всі виборці перемістили b на початок. На певному етапі ми досягнемо такого профілю P^l , що $l > [n/2]$. В силу твердження доведеного на *Етапі 1*, в результаті $\succ_f$ альтернатива b почне знаходитись на початку. Нехай n^* — виборець, який вперше переставивши b , змінив $\succ_f$. Профіль переваг за один до того, як n^* перемістив b з найнижчої позиції на найвищу позначимо як P^k . Таким чином, в P^l результат b змінив позицію в $\succ_f$ лише за рахунок зміни вподобань одним виборцем. Іншими словами, ми показали, що знайдуться такі два профілі P^k, P^l , які відрізняються тільки вподобаннями виборця n^* відносно b : в профілі P^k альтернатива b знаходиться в кінці списку і результат показує її в кінці, а вже в P^l – на початку і в результаті вона опиняється на початку, що доводить твердження.

Етап 3.

Покажемо, що виборець n^* — диктатор над кожною парою $\langle a, c \rangle$, що не включає в себе b . Тобто позиції альтернатив a і c в $\succ_f$ один до одної залежать лише від вподобань n^* відносно a і c :

Виберемо з пари $\langle a, c \rangle$, один елемент, не порушуючи загальності, нехай це буде a . Далі змінимо профіль P^l наступним чином: для виборця n^* , змінимо $\succ_{n^*}$, перемістивши альтернативу a на першу позицію, інші його ранжування залишимо незмінними, а для всіх інших виборців поміняємо місцями a і c один з одним довільним чином. Новий профіль позначимо P^q :

n_1	n_2	...	n^*	...	n_{n-1}	n_n
b	b	b	a	...	...	...
...	...	...	b	c	a	c
a	c	a	...	...	...	...
...	...	...	...	a	c	a
c	a	c	c	...	...	...
...	...	...	...	b	b	b

В силу (A1), отримаємо, що $a \succ_f b$, як в P^k (оскільки більше половини поставили a вище ніж b) і, за тих самих причин, $b \succ_f c$, як в P^l . Тоді, в силу транзитивності, $a \succ_f c$. Тепер модифікуємо цей профіль таким чином: для кожного виборця в списку вподобань $\succ_i$ помістимо альтернативу b на довільну позицію. Новий профіль позначимо P^s . Оскільки ми не змінювали a по відношенню до c , то в силу (A1) $a \succ_f c$. Іншими словами, після таких змін, ми отримали ситуацію, коли всі виборці окрім n^* в профілі P^s , порівняно з P^l мають абсолютно довільні профілі вподобань, а результат $a \succ_f c$ було отримано лише з припущення, що $a \succ_{n^*} c$.

Етап 4.

Нарешті, покажемо, що виборець n^* — диктатор над кожною парою $\langle a, b \rangle$, тобто доведемо єдиність диктатора:

Розглянемо деяку альтернативу c . Використовуючи твердження з *Етапу 2* існує деякий переворотний виборець n^{**} для цієї альтернативи і він же диктатор для всіх пар $\langle a, b \rangle$. Припустимо, що $n^{**} \neq n^*$ — диктатор над $\langle a, b \rangle$. Якщо це так — жодна зміна вподобань виборця n^* не змогла б поміняти ранжування a і b в $\succ_f$. Але на *Етапі 2*, виборець n^* , який є диктатором над $\langle a, c \rangle$, що доведено на *Етапі 3*, змінивши вподобання щодо b переставив її з останнього місця на перше в $\succ_f$, і таким чином був поміняв місцями a і b . Отже, можна зробити висновок, що $n^{**} \neq n^*$, тобто диктатор може бути тільки один.

Отже, ми показали що єдиною комбінацією для виконання всіх властивостей функції соціального вибору є існування і єдиність диктатора, тобто виборця, чії особисті вподобання якого визначають результат голосування. Але оскільки серед властивостей функції є (A4) (Відсутність диктатора), такої функції існувати не може.

Доведення завершено. ■

Розділ 3. Експериментальне дослідження частоти парадоксів у методах Кондорсе та Борда

3.1. Опис задачі та умов експерименту

У цьому дослідженні ми визначаємо частоту виникнення парадоксів на випадкових профілях голосування для методів Кондорсе і Борда в залежності від зміни кількості альтернатив або виборців. Профілі генеруємо за допомогою моделі Impartial Culture (IC), тобто коли коли кожен можливий профіль переваг виборців над кандидатами виникає з однаковою ймовірністю (усі перестановки рівноймовірні).

Розглядаються такі парадокси:

1. Для методу Кондорсе – *Цикл Кондорсе* (порушення транзитивності, коли не існує явного переможця і виникає циклічна структура, наприклад $A > B$, $B > C$, $C > A$);
2. Для методу Борда – *Незалежність від сторонніх альтернатив* (ПА) (випадок, коли присутність або відсутність непереможного кандидата впливає на результат виборів між іншими кандидатами).

Експеримент повторюється за наступних умов:

1. При фіксованій кількості кандидатів A і лінійно зростаючій кількості виборців N ;
2. При фіксованій кількості виборців N і лінійно зростаючій кількості кандидатів A .

На основі зібраних даних будуються графіки залежності частоти кожного парадоксу від росту A та від росту N окремо для кожного методу голосування. Далі наведено реалізацію описаного експерименту у вигляді Python коду.

3.2. Підготовка середовища

На початку було імпортовано основні бібліотеки, включаючи `random` для створення випадкових профілів виборців, `numpy` і `matplotlib.pyplot` для візуалізації результатів на графіках.

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Далі реалізовано функції для генерації профілів виборців та системи ранжування їх вподобань.

```
def generate_profile(candidates):
    return random.sample(range(1, candidates + 1), candidates)
```

Функція яка приймає кількість альтернатив (`candidates`) і повертає випадкову перестановку чисел від 1 до `candidates` включно. Кожна така перестановка імітує повний ранжувальний бюлетень одного виборця.

```
def generate_ranging_system(candidates, voters):
    return [generate_profile(candidates) for _ in range(voters)]
```

Функція яка створює список із профілів всіх виборців та повертає матрицю розмірності (`voters × candidates`), де кожен рядок — окремий виборець.

3.3. Реалізація методів і пошук парадоксів

3.3.1. Метод Кондорсе

Спочатку реалізуємо сам метод Кондорсе.

```
def has_condorcet_cycle(ranging_system):
    candidates = sorted(ranging_system[0])
    voters = len(ranging_system)
    adj = {c: set() for c in candidates}
```

Для цього беремо перший бюлетень (`ranging_system[0]`), отримуємо з нього список усіх кандидатів (їхні мітки) і сортуємо для впорядкованості. Далі підраховуємо загальну кількість виборців (тобто довжину списку всіх бюлетенів) і створюємо орієнтований граф у вигляді словника, де кожен кандидат «с» має порожню множину сусідів `adj[c]`.

Далі формуємо граф попарних переваг:

```
for i in candidates:
    for j in candidates:
        if i == j: continue
        if sum(b.index(i) < b.index(j) for b in ranging_system) > voters / 2:
            adj[i].add(j)
# Перевірка: чи існує переможець за Кондорсе
for i in candidates:
    if adj[i] == set(candidates) - {i}:
```

Для кожної пари різних кандидатів (i, j), $\text{sum}(b.\text{index}(i) < b.\text{index}(j) \text{ for } b \text{ in } \text{ranging_system})$ рахує, у скількох бюлетенях кандидат "i" отримав вищий ранг (займає позицію лівіше, ніж j). Якщо більше ніж половина виборців віддають перевагу i над j, то в граф додається ребро $i \rightarrow j$. В результаті ми отримуємо оргграф, де з вершини i виходять ребра до всіх тих j, яких i здолав у попарному порівнянні. Після цього перевіряємо наявності переможця Кондорсе – якщо такий кандидат знайдений, функція повертає False, бо цикл Кондорсе неможливий (є чіткий переможець). Таким чином ми реалізували метод Кондорсе.

Тепер нам потрібно фіксувати появу циклу. Це було реалізовано за допомогою DFS - алгоритму пошуку в глибину, наступним чином:

```
# DFS: для пошуку циклу
visited, stack = set(), set()
def dfs(u):
    visited.add(u); stack.add(u)
    for v in adj[u]:
        if v not in visited:
            if dfs(v): return True
        elif v in stack:
            return True
    stack.remove(u)
    return False
return any(dfs(node) for node in candidates if node not in visited)
```

Починаємо з того, що поміщаємо будь-яку вершину графа на вершину стека (вершину v), потім беремо верхній елемент стека і додаємо його до списку «visited», створюємо список суміжних вершин для цієї вершини і додаємо ті вершини, яких немає у списку «visited», у верх стека. Повторюємо кроки 2 і 3, поки стек не стане порожнім [9, с.95-98].

3.3.2. Метод Борда

Реалізуємо метод Борда:

```
def get_borda_scores(ranging_system):
    candidates = len(ranging_system[0])
    scores = [0] * candidates
    for ballot in ranging_system:
        for position, candidate in enumerate(ballot):
            scores[candidate - 1] += candidates - 1 - position
    return scores
```

Тут ми зчитуємо число кандидатів з першого бюлетеня, ініціалізуємо масив scores нулями (по одній ячейці на кожного кандидата) і для кожного бюлетеня (ballot) проходимо по позиціях: кандидату з найвищим рейтингом (position=0) нараховуємо candidates-1 балів, наступному — candidates-2, і так далі...

В кінці повертаємо список підсумкових балів за методом Борда.

Тепер фіксуємо випадки, коли метод порушує ІА:

```
def check_iaa_paradox_borda(ranging_system):
    original_scores = get_borda_scores(ranging_system)
    original_winner = original_scores.index(max(original_scores))
    original_looser = original_scores.index(min(original_scores))
    if original_scores.count(max(original_scores)) > 1:
        return False
    reduced = remove_candidate_from_system(ranging_system, original_looser+1)
    new_scores = get_borda_scores(reduced)
    new_winner = new_scores.index(max(new_scores))
    if new_winner >= original_looser:
        new_winner += 1
    return not (new_winner == original_winner and
new_scores.count(max(new_scores)) == 1)
```

1. Знаходимо початкового переможця та гравця, який програв;
2. Видаляємо того, який програв та переобчислюємо систему;
3. Виправляємо індекс переможця у зв'язку із зсувом;
4. Якщо переможець змінився (або виникла нічия) — повертаємо True.

**В даній реалізації ми ігноруємо нічию у першому голосуванні. При цьому якщо в першому голосуванні нічий не було, а у після видалення нерелевантної альтернативи вона з'явилась — фіксуємо це як парадокс.*

Для видалення кандидату, який програв було створено окрему функцію:

```
def remove_candidate_from_system(ranging_system, candidate_to_remove):
    reduced_system = []
    for ballot in ranging_system:
        new_ballot = []
        for c in ballot:
            if c == candidate_to_remove:
                continue
            # якщо мітка більша за видалену, зменшуємо її на 1
            new_label = c - 1 if c > candidate_to_remove else c
            new_ballot.append(new_label)
        reduced_system.append(new_ballot)
    return reduced_system
```

3.4. Налаштування моделювання

Перед створенням графіків підготуємо дані які будемо відображати:

```
iterations = 50
voter_counts = [i for i in range(3, 2000, 10)]
candidate_counts = [i for i in range(3, 100, 3)]
fixed_candidates = 3
fixed_voters = 50
```

1. В змінній *iterations* будемо передавати загальну кількість ітерацій для кожної пари параметрів, щоб усереднити випадковість;
2. *voter_counts* відображає кількість виборців на графіку по принципу ([початкове значення], [кінцеве значення], [крок]), *candidate_counts* — аналогічно для альтернатив;
3. *fixed_candidates* / *fixed_voters* — чисельна фіксована кількість альтернатив/виборців, при змінному протилежному параметру.

Врешті-решт, реалізуємо функції які безпосередньо фіксують одну змінну і збільшують іншу.

Для фіксованої кількості кандидатів і змінної кількості виборців:

```
def compute_voters(v):
    cc = bb = 0
    for _ in range(iterations):
        rs = generate_ranging_system(fixed_candidates, v)
        cc += has_condorcet_cycle(rs)
        bb += check_ii paradox_borda(rs)
    cond_freq_vs_voters.append(cc / iterations)
    borda_freq_vs_voters.append(bb / iterations)

run_with_manual_progress(voter_counts, "Varying voters ", compute_voters)
```

Для фіксованої кількості виборців і змінної кандидатів:

```
def compute_candidates(c):
    cc = bb = 0
    for _ in range(iterations):
        rs = generate_ranging_system(c, fixed_voters)
        cc += has_condorcet_cycle(rs)
        bb += check_iaa_paradox_borda(rs)
    cond_freq_vs_candidates.append(cc / iterations)
    borda_freq_vs_candidates.append(bb / iterations)

run_with_manual_progress(candidate_counts, "Varying cands",
compute_candidates)
```

На виході отримуємо чотири масиви частот.

3.5. Візуалізація частот парадоксів на графіках

За допомогою matplotlib будуємо по одному графіку для кожної залежності:

```
plt.figure()
plt.plot(voter_counts, cond_freq_vs_voters)
plt.title(f'Condorcet Cycle Frequency vs Number of Voters\n(Fixed Candidates = {fixed_candidates})')
plt.xlabel('Number of Voters')
plt.ylabel('Frequency of Condorcet Cycle')
plt.grid(True)
plt.show()

plt.figure()
plt.plot(voter_counts, borda_freq_vs_voters)
plt.title(f'Borda IIA Violation Frequency vs Number of Voters\n(Fixed Candidates = {fixed_candidates})')
plt.xlabel('Number of Voters')
plt.ylabel('Frequency of Borda IIA Violation')
plt.grid(True)
plt.show()

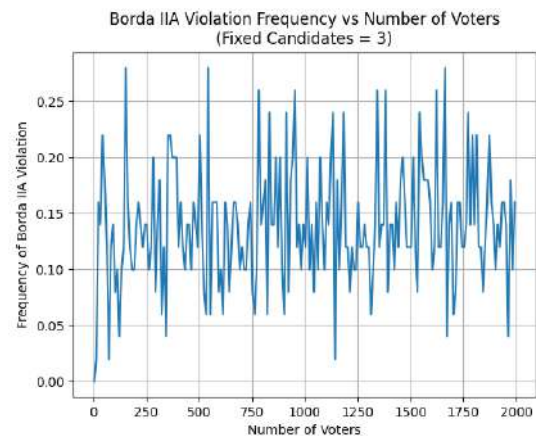
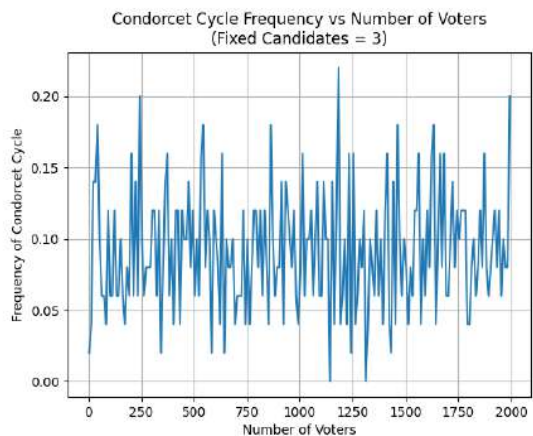
plt.figure()
plt.plot(candidate_counts, cond_freq_vs_candidates)
plt.title(f'Condorcet Cycle Frequency vs Number of Candidates\n(Fixed Voters = {fixed_voters})')
plt.xlabel('Number of Candidates')
plt.ylabel('Frequency of Condorcet Cycle')
plt.grid(True)
plt.show()

plt.figure()
plt.plot(candidate_counts, borda_freq_vs_candidates)
plt.title(f'Borda IIA Violation Frequency vs Number of Candidates\n(Fixed Voters = {fixed_voters})')
plt.xlabel('Number of Candidates')
plt.ylabel('Frequency of Borda IIA Violation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

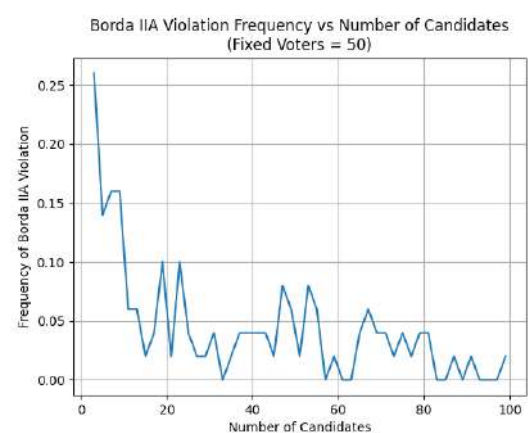
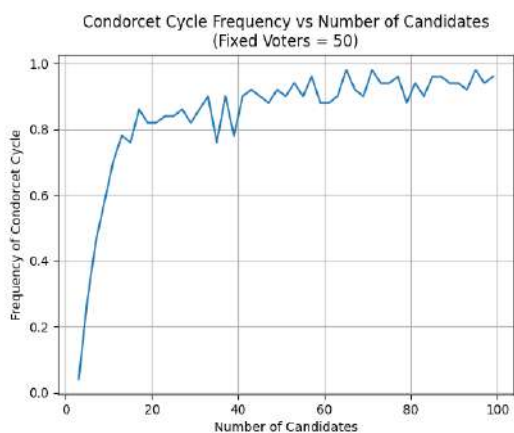

Далі, тестуючи різні комбінації фіксованих максимальних та мінімальних значень альтернатив і виборців, проведемо декілька експериментів:

Експеримент №1.

При зростанні виборців – фіксовано 3 альтернативи, число виборців зростає від 3 до 2000 (крок 10):

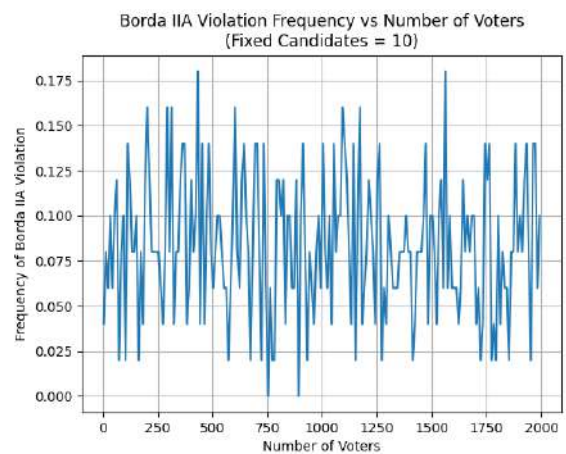
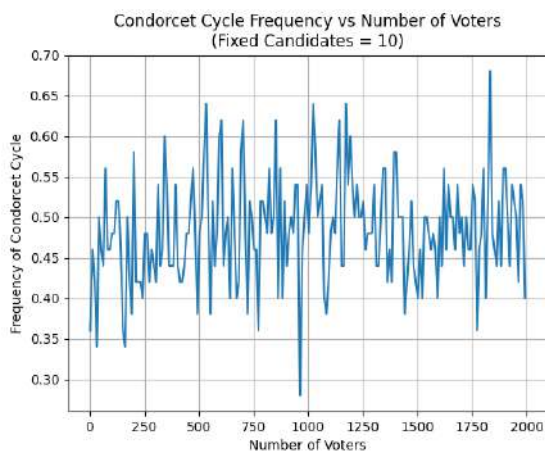


При зростанні альтернатив – фіксовано 50 виборців, число альтернатив зростає від 3 до 100 (крок 3):

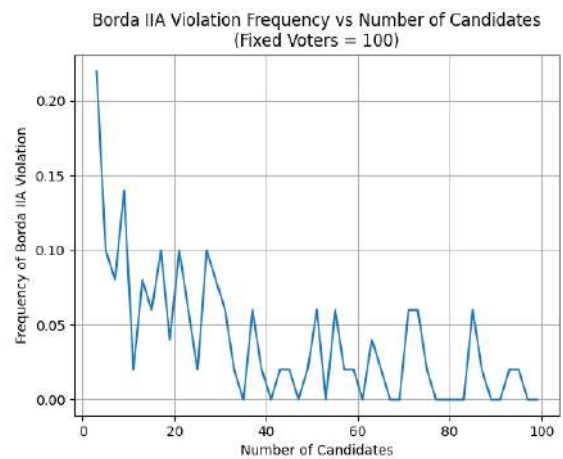
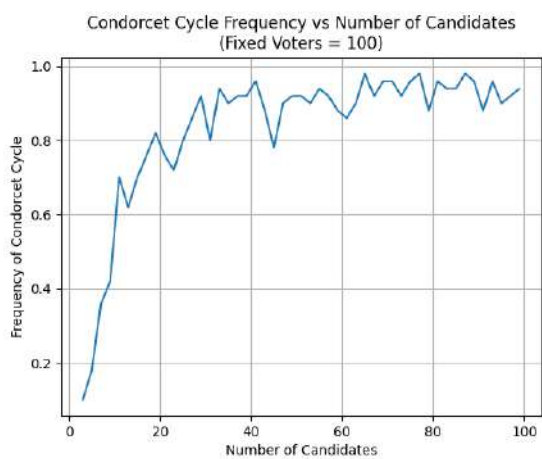


Експеримент №2.

При зростанні виборців – фіксовано 10 альтернатив, число виборців зростає від 3 до 2000 (крок 10):

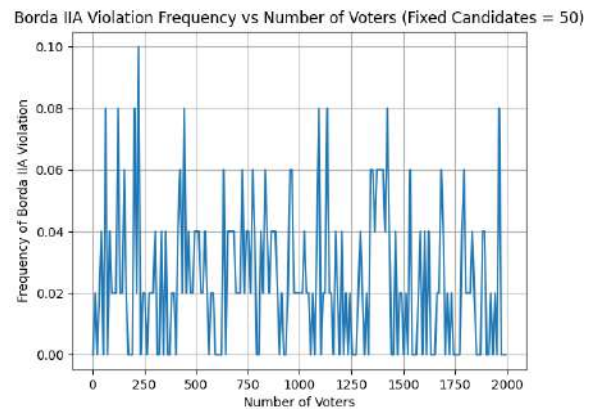
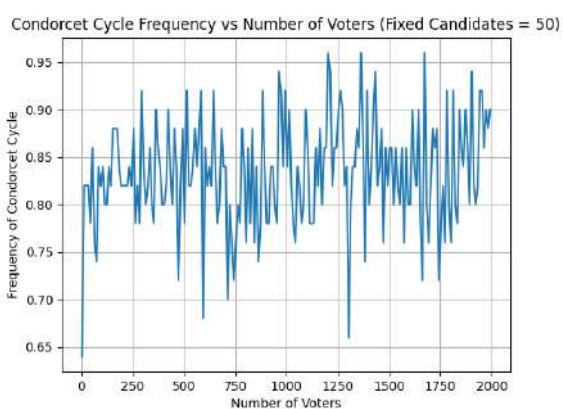


При зростанні альтернатив – фіксовано 100 виборців, число альтернатив зростає від 3 до 100 (крок 3):

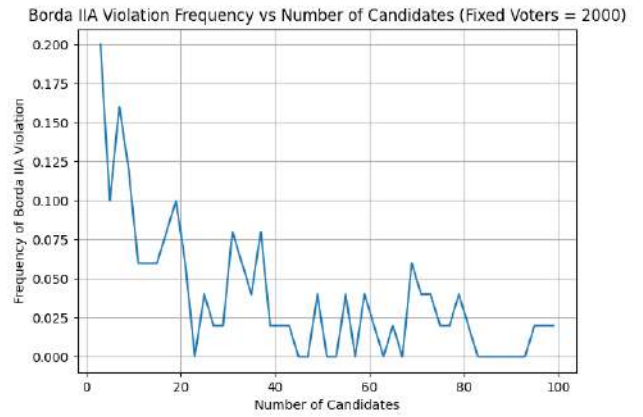
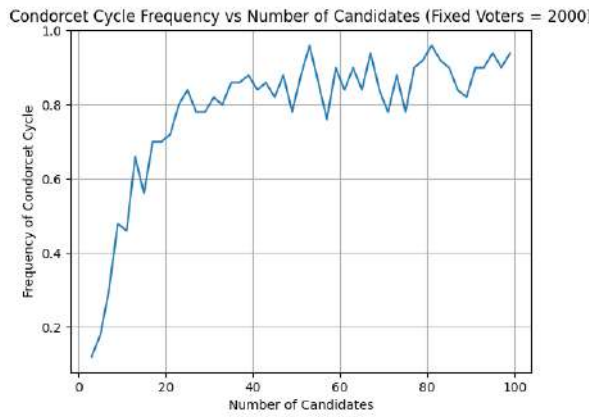


Експеримент №3.

При зростанні виборців – фіксовано 50 альтернатив, число виборців зростає від 3 до 2000 (крок 10):

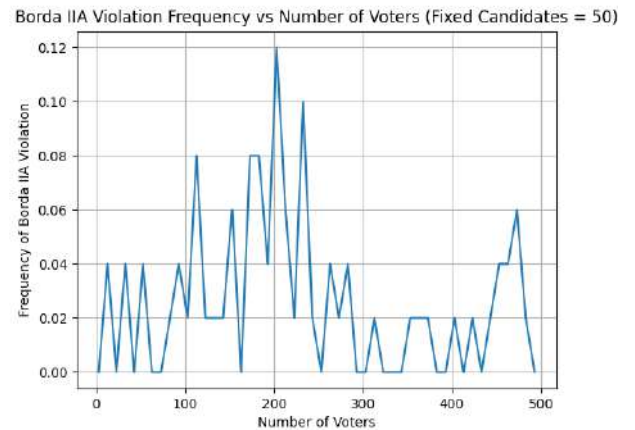
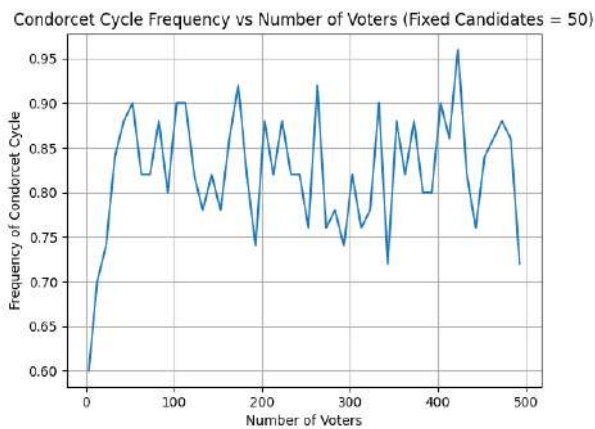


При зростанні альтернатив – фіксовано 2000 виборців, число альтернатив зростає від 3 до 100 (крок 3):

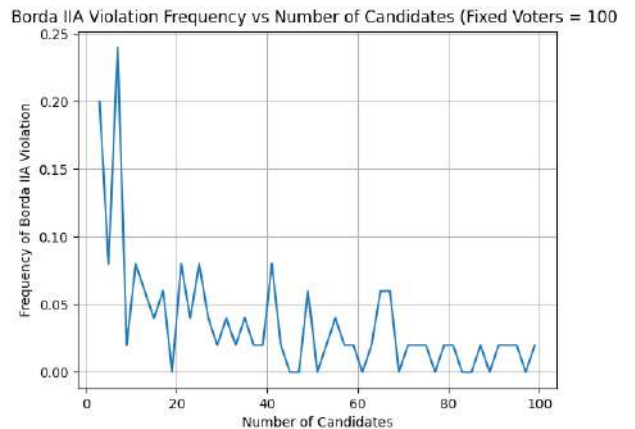
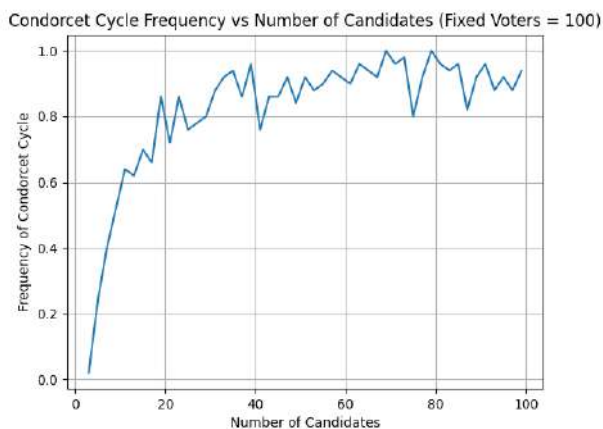


Експеримент №4.

При зростанні виборців – фіксовано 50 альтернатив, число виборців зростає від 3 до 500 (крок 10):



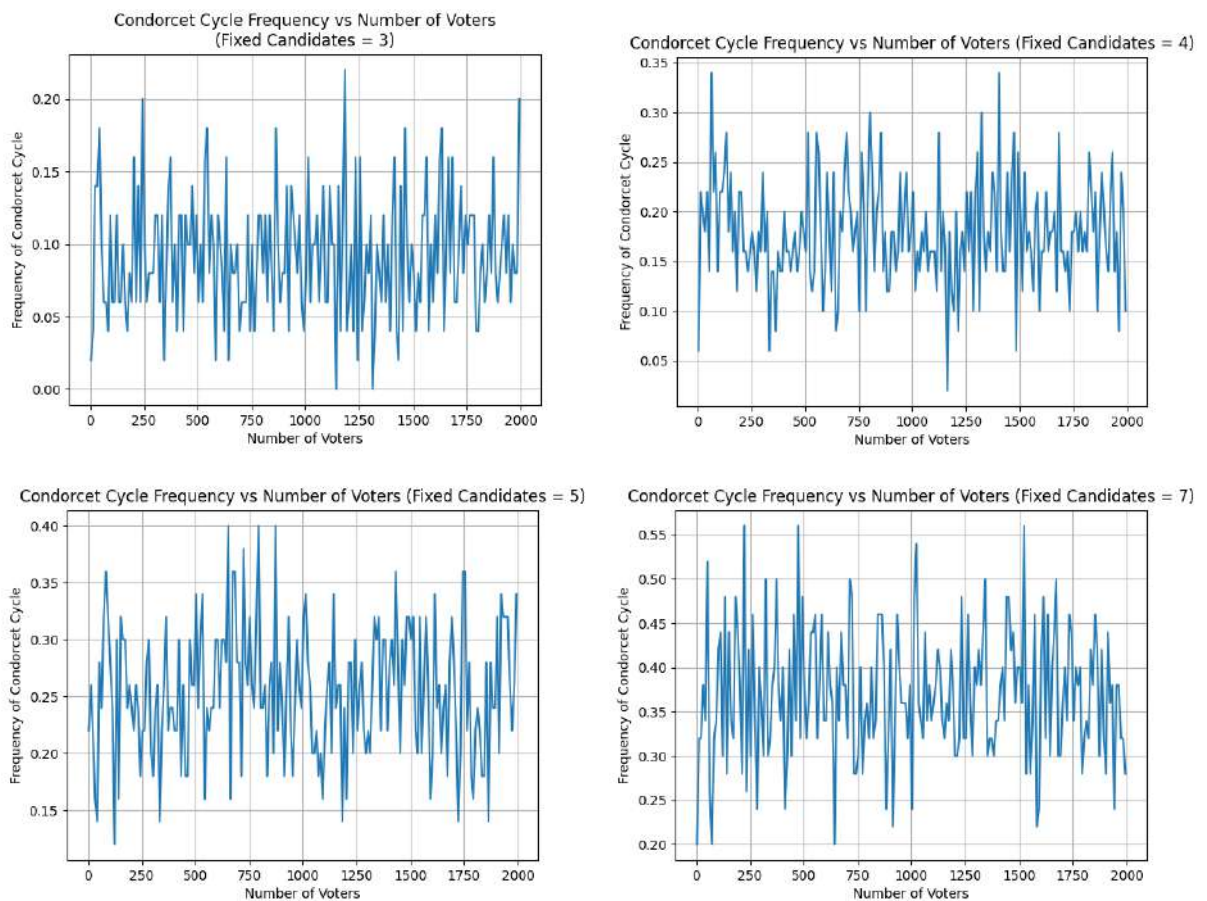
При зростанні альтернатив – фіксовано 100 виборців, число альтернатив зростає від 3 до 100 (крок 3):



3.6. Аналіз результатів

Можемо побачити, що головним чином зміна кількості парадоксів залежить від зростання кількості альтернатив, тоді як кількість виборців регулює стабільність результатів, тобто визначає, наскільки швидко моделювання наближається до характерних частот (великий n дає менше відхилень).

При використанні методу Кондорсе частота виникнення парадоксів збільшується і прямує до 100%, причому дуже швидко. Для того щоб це побачити більш наглядно, наведемо графіки при $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$ і $m = 7$:



Тобто частота появи парадоксу зростає на $\sim 7\%$ з кожною новою альтернативою.

При використанні методу Борда збільшення кількості альтернатив навпаки зменшує частоту виникнення парадоксів, при цьому кількість виборців неважлива.

На великих вибірках, метод Борда показує набагато меншу частоту виникнення парадоксів, а при збільшенні кількості альтернатив, ймовірність виникнення парадоксу наближається до нуля.

Отже, підсумовуючи результати експерименту, можемо заключити що:

1. Метод Борда є більш стійким до парадоксів, ефективнішим у використанні та перспективнішим для того, щоб на його основі розроблювати інші методи;
2. Для прогнозування результатів голосування не обов'язково проводити дослідження на великій кількості виборців, оскільки їх кількість не впливає на загальну картину частоти появи парадоксів.

Висновки

Дослідження різних методів голосування показує, що кожен з них має свої переваги та недоліки. Вибір відповідного методу для прийняття рішень у конкретних ситуаціях може значно впливати на кінцевий результат та його сприйняття суспільством. Для демонстрації цього мною було наведено декілька прикладів, коли навіть при невеликій кількості виборців і альтернатив, при застосуванні певних методів, можуть виникати парадокси, а також проведено експеримент, в ході якого було визначено що найменшу частоту появи парадоксів має саме метод Борда.

Теорема Ерроу, яка є центральним об'єктом даної роботи, доводить неможливість існування "ідеальної" системи голосування, тобто такої, яка б водночас задовільняла всі логічні критерії і не мала б диктатора. Тому вибираючи систему для преференційного голосування для того чи іншого процесу, важливо обирати таку, щоб можливі похибки не вплинули на кінцевий результат суттєво. За умови що виборці не зможуть голосувати не щиро, а кандидатів 5 і більше, краще за все себе показує метод Борда.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бучин М., Федорій І. Порівняльний аналіз основних виборчих систем: проблема вибору оптимальної моделі виборчої системи для України у плані дотримання демократичних принципів виборів// *Українська національна ідея: реалії та перспективи розвитку*, 2009, випуск 21, с. 58-62.
2. Ветров О. С., Довбня К. М., Ливицька Д. О. Комп'ютерно-математичне моделювання можливостей корекції визначення переможця голосування методом Борда. // *Збірники наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса*. 2019, с. 121-123.
3. Гайдай Ю. О. Дослідження маніпулювання результатами голосування (на прикладі методу Борда). Кваліфікаційна (бакалаврська робота) зі спеціальності 113 - Прикладна математика, Вінниця, 2021.
4. Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2-ге вид. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010, - 336 с.
5. Ігнатенко О. Теорія ігор і системи голосування. Частина друга: Кондорсе проти Борда. URL: <https://site.ua/olexii.ignatenko/teoriya-igor-i-sistemi-golosuvannya-castina-druga-kondorse-proti-borda-i0l12kq>
6. Ігнатенко О. Теорія ігор і системи голосування. Частина третя: Теорема Ерроу – неможливість чи можливість? URL: <https://site.ua/olexii.ignatenko/teoriya-igor-i-sistemi-golosuvannya-castina-tretya-teorema-errou-nemozlivist-ci-mozlivist-i04nzno>
7. Михайленко Б. А. Застосування методу Борда при голосуванні на конкурсі Євробачення. Дипломна робота на здобуття ступеня бакалавра зі спеціальності 124 - Системний аналіз, КПІ ім. І. Сікорського, 2024.
8. Мохончук Б.С. Голосування за «методом Борда» – передумови створення та практика застосування// *Принципи сучасного*

- конституціоналізму та Основний Закон України. IX Тодиківські читання : зб. тез наук. доп. і повідомл. Міжнар. наук. конф. (4–5 лист. 2016 р.). Харків, 2016. С. 88–89.
9. Поліщук В. С., Потапова Н. А. Алгоритм пошуку у глибину. Комп'ютерні технології обробки даних, 2024, 95-98.
 10. Arrow K. J. Social Choice and Individual Values, 1951.
 11. Geanakoplos J. Two Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem (1996). Cowles Foundation Discussion Papers. 1366. <https://elischolar.library.yale.edu/cowles-discussion-paper-series/1366>
 12. May K. O. A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision// *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1952: 680-684.
 13. Dummett M. The Borda count and agenda manipulation// *Social Choice and Welfare*, Springer, 1998, 15.2: 289-296.
 14. Gilmour J. B. The powell amendment voting cycle: an obituary.// *Legislative Studies Quarterly*, 2001: 249-262.
 15. Stefansson B. S. Borda's method applied—the right to make a proposal: A historical note// *Quality and Quantity*, Springer, 1991, 25.4: 389-392.
 16. Saari D. G. Mathematical structure of voting paradoxes: I. Pairwise votes. *Economic Theory*, Springer, 2000, 15(1), 1-53.